Elementargeometrie

Dreieck: $A = \frac{gh}{2}$

– gleichseitig: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} s$

– rechtwinklig: $c^2 = a^2 + b^2$

– Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Kreis: $u = 2\pi r$ und $A = \pi r^2 \approx 0,785 \cdot d^2$

Prisma / Zylinder: $V = Gh$

Pyramide / Kegel: $V = \frac{1}{3}Gh$

Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$

Trigonometrie

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$f'(x) = \tan\alpha$

quadratische Gleichungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Folgen und Reihen

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$ $\qquad$ $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ $\qquad$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

Differentialrechnung

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $(\sin\alpha)' = \cos\alpha$ $\qquad$ $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$

$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ $\qquad$ $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ $\qquad$ $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Iterationsschritt beim Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hoch- / Tief- / Sattelpunkt $\Rightarrow f'(x) = 0$ $\qquad$ Wendepunkt $\Rightarrow f''(x) = 0$

Linkskurve $\Leftrightarrow f''(x) > 0$ $\qquad$ Rechtskurve $\Leftrightarrow f''(x) < 0$

Tangente: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $\qquad$ Potenzreihe: $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Normale: $f(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Ableitung der Umkehrfunktion: $y = f(x) \;\Rightarrow\; {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Ortskurve eines Punktes $P_\alpha = (x(\alpha) \,/\, y(\alpha))$: $\alpha = \alpha(x) \;\Rightarrow\; f(x) = y(\alpha(x))$

Krümmungsradius: bei waagrechter Tangente: $r = \left|\frac{1}{f''(x)}\right|$ $\qquad$ allgemein: $r = \left|\frac{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}\right|$

Integralrechnung

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ für $n \neq -1$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ $\qquad$ $\int q^x dx = \frac{1}{\ln q} q^x$ für $q > 0, q \neq 1$

Substitution und partielle Integration: Mit $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$ gilt:

$$\int f(G(x)) \cdot g(x)\,dx = F(G(x))$$

$$\int F(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G(x)\,dx$$

Rotationskörper: $V(x) = \int\limits_0^x \pi \cdot f(\xi)^2\,d\xi$

lineare Algebra

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad D_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \quad , \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \quad , \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma$

Spatprodukt: $V_{\text{Spat}} = |\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$

Leontiefmodell
(Produktion $\vec{p}$ / Ressourcen $\vec{r}$ / Überschuss $\vec{u}$): $\vec{r} = A \cdot \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{p} - \vec{r} = (E - A) \cdot \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{u}$

Fixpunkte: $A\vec{x} = \vec{x} \quad \Rightarrow \quad (A - E)\vec{x} = \vec{0} \quad \underset{\text{(zweidimensional)}}{\Rightarrow}$ suche nichttriviale Lösungen für $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} - 1 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & 0 \end{array}\right)$

Eigenwerte und Eigenvektoren: $A\vec{x} = k\vec{x} \quad \Rightarrow \quad (A - kE)\vec{x} = \vec{0} \quad \underset{\text{(dreidimensional)}}{\Rightarrow}$ suche nichttriviale Lösungen für $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k & 0 \end{array}\right)$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Kombinatorik	Reihenfolge wichtig	Reihenfolge egal	Wahrscheinlichkeit
Wiederholungen möglich	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Wiederholungen nicht möglich	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Statistik

Erwartungswert: $\mu = \sum_k k p_k$

Schätzer für den Erwartungswert: $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k$, für die Standardabweichung: $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \hat{\mu})^2}$

Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit α (z.B. 90%-Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$):

allgemeiner Ansatz: $\mu - x\sigma \leq S \leq \mu + x\sigma \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$
Gleichung für Grenzen des Intervalls: $\mu = S \pm x\sigma$
Binomialverteilung: $Np = S \pm x\sqrt{Np(1-p)} \approx S \pm x\sqrt{N\frac{S}{N}(1 - \frac{S}{N})} \Rightarrow p_{1/2} \approx \frac{S \pm x\sqrt{S(1-\frac{S}{N})}}{N}$

Verteilungen:

Binomialverteilung	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\mu = np$	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
Exponentialverteilung	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\mu = \frac{1}{\lambda}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$
Gammaverteilung	$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$	$\mu = \frac{2}{\lambda}$	$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$
Normalverteilung	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$		